

2020年天津和平区高三二模数学试卷

一、选择题

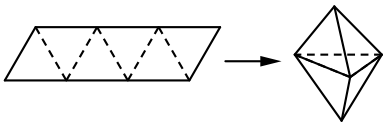
(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

- 设复数 $z = a + 2i$ ($a \in \mathbf{R}$) 的共轭复数为 $\bar{z}$, 且 $z + \bar{z} = 2$, 则复数 $\frac{|z|}{2 - ai}$ 在复平面内对应点位于 ().
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $x^3 < 1$ ” 是 “ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ” 的 ().
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知: $a = \ln \frac{11}{4}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{e}}$, $c = \log_{\frac{1}{e}} \frac{1}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
A. $c > a > b$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$
- 已知甲、乙两人独立出行, 各租用共享单车一次 (假定费用只可能为1、2、3元). 甲、乙租车费用为1元的概率分别是0.5、0.2, 甲、乙租车费用为2元的概率分别是0.2、0.4, 则甲、乙两人所扣租车费用相同的概率为 ().
A. 0.18 B. 0.3 C. 0.24 D. 0.36
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 1$, $c = 2\sqrt{3}$, $b \sin A = a \sin \left(\frac{\pi}{3} - B\right)$, 则 $\sin C =$ ().
A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{57}}{19}$
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > 0$) 的右焦点为 F , 圆 $x^2 + y^2 = c^2$ (c 为双曲线的半焦距) 与双曲线 C 的一条渐近线交于 A, B 两点, 且线段 AF 的中点 M 落在另一条渐近线上, 则双曲线 C 的方程是 ().
A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
- 把函数 $f(x) = A \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($A \neq 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x - m)$ ($m > 0$) 是偶函数, 则实数 m 的最小值是 ().
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{\pi}{12}$
- 已知 $a, b > 0$, $\left(a - \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{b}{a}$, 则当 $a + \frac{1}{b}$ 取最小值时, $a^2 + \frac{1}{b^2}$ 的值为 ().
A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. 4
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = f(1-x) - kx + k - \frac{1}{2}$ 恰有三个不同的零点, 则 k 的取值范围是 ().
A. $\left(-2 - \sqrt{2}, 0\right] \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$ B. $\left(-2 + \sqrt{2}, 0\right] \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$
C. $\left(-2 - \sqrt{2}, 0\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ D. $\left(-2 + \sqrt{2}, 0\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$

二、填空题

(本大题共6小题，每小题5分，共30分)

10. 已知全集为 $\mathbf{R}$ ，集合 $M = \{-1, 0, 1, 5\}$ ， $N = \{x|x^2 - x - 2 \geq 0\}$ ，则 $M \cap (\complement_{\mathbf{R}}N) =$ _____ .
11. $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中， $\frac{1}{x^2}$ 项的系数为_____ .
12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增，若实数 a 满足 $f(2^{\log_3 a}) > f(-\sqrt{2})$ ，则 a 的取值范围是_____ .
13. 农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽粿，俗称“粽子”，古称“角黍”，是端午节大家都会品尝的食品，传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原如图，平行四边形形状的纸片是由六个边长为1的正三角形构成的，将它沿虚线折起来，可以得到如图所示粽子形状的六面体，则该六面体的体积为_____；若该六面体内有一球，则该球体积的最大值为_____ .



14. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$ ，准线为 l ，过焦点的直线交抛物线于 A, B 两点，分别过 A, B 作 l 的垂线，垂足为 C, D ，若 $|AF| = 4|BF|$ ，则 $p =$ _____，三角形 CDF 的面积为_____ .
15. 已知平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $9\sqrt{3}$ ， $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$ ， E 为线段 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} =$ _____；若 F 为线段 DE 上的一点，且 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{5}{6} \overrightarrow{AD}$ ，则 $|\overrightarrow{AF}|$ 的最小值为_____ .

三、解答题

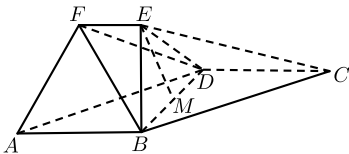
(本大题共5小题，共75分)

16. 为了进一步激发同学们的学习热情，某班级建立了理科、文科两个学习兴趣小组，两组的人数如下表所示．先采用分层抽样的方法（层内采用简单随机抽样）从两组中共抽取3名同学进行测试．

组别 性别	理科	文科
男	5	1
女	3	3

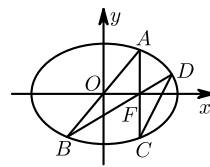
- (1) 求从理科组抽取的同学中至少有1名女同学的概率．
- (2) 记 ξ 为抽取的3名同学中男同学的人数，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望．

17. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形， $\angle ABD = 90^\circ$ ， $EB \perp$ 平面 $ABCD$ ， $EF \parallel AB$ ， $AB = 2$ ， $EB = \sqrt{3}$ ， $EF = 1$ ， $BC = \sqrt{13}$ ，且 M 是 BD 的中点．



- (1) 求证： $EM \parallel$ 平面 ADF ．
- (2) 求二面角 $D - AF - B$ 的大小．
- (3) 线段 EB 上是否存在点 P ，使得直线 CP 与直线 AF 所成的角为 30° ？若存在，求出 BP 的长；若不存在，请说明理由．

18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 。 F 为椭圆的右焦点， A, B 为椭圆关于原点对称的两点，连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点。



- (1) 求椭圆的标准方程；
 (2) 若 $AF = FC$ ，求 $\frac{BF}{FD}$ 的值；
 (3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 ，是否存在实数 m ，使得 $k_2 = mk_1$ ，若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由。

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列， $a_1 = \frac{3}{2}$ ，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_1 = a_1, b_2 = -a_3, b_3 = a^4$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。

- (1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。
 (2) 设 $c_n = \begin{cases} b_n, & n \leq 5 \\ 8a_n, & n \geq 6 \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。
 (3) 若 $A \leq S_n - \frac{1}{S_n} \leq B$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，求 $B - A$ 的最小值。

20. 已知函数 $f(x) = e^x - e^x \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (e 为自然对数的底数)。

- (1) 求函数 $f(x)$ 的值域。
 (2) 若不等式 $f(x) \geq k(x-1)(1-\sin x)$ 对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，求实数 k 的取值范围。
 (3) 证明： $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$ 。